HUBUNGAN ANTARA NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN DARI MATRIKS AB DAN BA

TESIS

GUSTINA
06215092

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG
2008

HUBUNGAN ANTARA NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN DARI MATRIKS AB DAN BA

TESIS

Oleh :

GUSTINA
06215092

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
2008

HUBUNGAN ANTARA NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN DARI MATRIKS AB DAN BA

Oleh : GUSTINA
No.BP : 06215092

(Di bawah Bimbingan Muhafzan, Ph.D dan Zulakmal, M.Si)

RINGKASAN

Misalkan A adalah matriks $m \times n$ dan B matriks $n \times m$ dengan $m \leq n$, maka perkalian kedua matriks A dan B, yakni AB dan BA akan menghasilkan suatu matriks bujur sangkar. Untuk $n = m$ dan B non singular, maka $AB = (B^{-1}B)AB = B^{-1}(BA)B$, yang menunjukkan bahwa AB similar dengan BA. Dilain pihak jika A dan B keduanya singular, maka AB tidak perlu similar dengan BA. Tetapi jika $m \leq n$, apa yang dapat disimpulkan tentang hubungan antara nilai eigen dan vektor eigen dari matriks AB dan BA?

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui hubungan antara nilai eigen dan vector eigen dari AB dan BA jika $A_{m\times n}$ dan $B_{n\times m}$, $m \leq n$.

Landasan teori atau konsep yang digunakan dalam menentukan hubungan antara nilai eigen dan vektor eigen dari AB dan BA jika $A_{m\times n}$ dan $B_{n\times m}$, $m \leq n$ adalah matriks, kebebasan linier, basis dan dimensi, rank, nilai eigen dan vektor eigen, similarities (keserupaan), matriks simple dan matriks devective, muliplisitas geometri dan ruang null.

Pembahasan atas permasalahan dilakukan berpedoman pada teori-teori tentang hubungan antara nilai eigen dan vektor eigen dari AB dan BA. Penelitian dilakakan

dengan tahapan mempelajari konsep tentang cara menentukan nilai eigen dan vektor eigen, multiplisitas geometri, polynomial katakteristik dan rank dari mtriks AB dan BA dan menyelesaikan beberapa masalah yang berkenan dalam hubungan antara nilai eigen dan vektor eigen dari AB dan BA.

Dari penelitian ini disimpulkan bahwa ada beberapa hubungan antara nilai eigen dan vektor eigen dari AB dan BA jika $A_{m\times n}$ dan $B_{n\times m}$, $m \leq n$, diantaranya adalah:

a. Jika u adalah vektor eigen dari AB dengan nilai eigennya adalah $\lambda = \lambda_0$ dimana $\lambda_0 \neq 0$ maka Bu adalah vektor eigen dari BA dengan nilai eigen yang sama yaitu $\lambda = \lambda_0$, dan muitiplisitas geometri dari AB dan BA adalah sama atau $g_{AB}(\lambda_0) = g_{BA}(\lambda_0)$.
b. Jika diketahui polinomial karakteristik dari AB adalah $c_{AB}(\lambda)$ maka polinomial karakteristik dari BA adalah $c_{BA}(\lambda) = \lambda^{n-m} c_{AB}(\lambda)$. Sedangkan jika $m = n$ maka $c_{BA}(\lambda) = c_{AB}(\lambda)$.
c. Jika diketahui AB adalah matriks simple maka BA matriks simple jika dan hanya jika $\text{rank}(AB) = \text{rank}(BA)$

HUBUNGAN ANTARA NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN DARI MATRIKS AB DAN BA

Oleh :

GUSTINA
06215092

TESIS

Sebagai salah satu syarat
untuk memperoleh gelar Magister Matematika
pada Program Pascasarjana Universitas Andalas

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
2008

Judul Penelitian	:	**HUBUNGAN ANTARA NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN DARI MATRIKS AB DAN BA**
Nama Mahasiswa	:	**GUSTINA**
Nomor Pokok	:	**06215092**
Program Studi	:	**MATEMATIKA**

Tesis ini telah diuji dan dipertahankan di depan sidang panitia ujian akhir Magister Sains pada program Pascasarjana Universitas Andalas dan dinyatakan lulus pada tanggal 1 Agustus 2008

Menyetujui :

1. Komisi Pembimbing

Muhafzan, Ph.D	**Zulakmal, M.Si**
(Ketua)	(Anggota)

2. Ketua Program Studi	3. Direktur Program Pascasarjana
Jenizon, M.Si	**Prof.Dr. Ir. H. Novirman Jamarun, M.Si**
Nip. 132206780	Nip. 130819552

بسم الله الرحمن الرحيم

Sesungguhnya Aku mengingatkan pada mu
Supaya kamu tidak termasuk
orang-orang yang tiak berpengetahuan
(Aiqur'an surat Hud ayat 46)

Kupersembahkan karya ini
Untuk yang termulia Papaku Yusman. K
& yang termulia Mamaku Yunius
Untuk suamiku tercinta Marlis suryadi, SH
Adik-adikku tersayang Yusmidarni, S.Pd dan Yulpa Aigif

Yang telah memberikan dukungan
baik materil maupun spritual
dalam menyelesaikan tesis ini.
Semoga semua pengorbanan yang diberikan
dijadikan suatu ibadah dan
diterima amalnya di sisi Allah Azza wa Jalla
Amin ya Rabbil'alamin

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Saya menyatakan yang sebenar-benarnya bahwa segala pernyataan dalam tesis saya yang berjudul HUBUNGAN NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN DARI MATRIKS AB DAN BA merupakan gagasan atau hasil penelitian saya sendiri, dengan bimbingan komisi pembimbing, kecuali yang dengan jelas ditunjukkan rujukannya. Tesis ini belum pernah digunakan untuk memperoleh gelar pada program sejenis perguruan tinggi lain. Semua data dan informasi yang digunakan telah diajukan secara jelas dan dapat diperiksa kebenarannya.

Padang, Juli 2008

Gustina
06215092

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Gustina dilahirkan di Batang Kapas Kabupaten Pesisir Selatan pada tanggal 1 Agustus 1977. Anak pertama dari pasangan Yusman. K dan Yunius, kakak dari Yusmidarni, S.Pd dan Yulpa Aigif dan didampingi oleh suami yang sabar dan setia Marlis Suryadi, SH.

Menamatkan Sekolah Dasar di SD Inpres Taratak pada tahun 1989 dan Sekolah Menengah Pertama di SMP N Tebing Tinggi pada tahun 1992 serta Sekolah Menengah Atas di SMA N 5 Padang pada tahun 1995. Pada tahun 1996 mendapat kesempatan untuk melanjutkan ke Jurusan Matematika FKIP Universitas Bung Hatta Padang dan selesai pada bulan April tahun 2001.

Pada awal tahun 2003 mulai mengajar di SMA N 1 Dharmasraya sampai sekarang. Pada tahun 2006 memperoleh kesempatan dari Dinas Pendidikan Propinsi Sumatera Barat untuk meneruskan pendidikan di Jurusan Matematika pada Program Pascasarjana Universitas Andalas Padang

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis ucapkan pada kebesaran Allah Subhanahu Wata'ala atas karuniaNya sehingga Penulis dapat menyelesaikan proposal penelitian ini dengan judul 'HUBUNGAN ANTARA NILAI EIGEN DAN VEKOR EIGEN DARI MATRIKS AB DAN BA'.

Tulisan ini adalah merupakan tesis yang menjadi salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains jurusan matematuka pada program Pasca Sarjana Universitas Andalas Padang.

Pada kesempatan ini, Penulis ingin menyampaikan terima kasih pada:

1. Bapak Prof. Dr. Ir. H. Novirman Jamarun, M.Sc selaku Direktur Program Pascasarjana Universitas Andalas
2. Bapak Jenizon, M.Si sebagai Ketua Jurusan Matematika
3. Bapak Muhafzan, Ph.D sebagai Pembimbing I
4. Bapak Zulakmal, M.Si sebagai Pembimbing II dan sekaligus sebagai Sekretaris Jurusan
5. Bapak Dr. I Made Arnawa, M.Si, Ibu Dr. Susila Bahri, M.Sc dan Ibu Dra. Nova Noliza Bakar, M.Si sebagai Dosen Penguji
6. Staf pengajar dan pegawai Tata Usaha Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas
7. Teman sejawat yang tak disebutkan namanya

yang telah memberikan arahan dan petunjuk serta dukungan secara moril dan spritual dalam mewujudkan tesis ini.

Kepada semua pihak penulis mengucapkan terima kasih atas semua masukan, saran dan kritikan, semoga tesis ini bermanfaat bagi pembaca pada umumnya dan bagi peminat matematika pada khususnya.

Padang, Juli 2008

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Misalkan A adalah matriks $m \times n$ dan B matriks $n \times m$ dengan $m \leq n$, maka perkalian kedua matriks A dan B, yakni AB dan BA, akan menghasilkan suatu matriks bujur sangkar. Untuk $n = m$ dan B non singular, maka

$$AB = (B^{-1}B)AB = B^{-1}(BA)B ,$$

yang menunjukkan bahwa AB similar dengan BA. Dilain pihak jika A dan B keduanya singular, maka AB tidak similar dengan BA. Untuk itu, perhatikan contoh berikut.

Diberikan matriks A dan B berikut ini:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

maka

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nilai eigen dari AB dan BA adalah $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Matriks AB adalah matriks *simple* dan matriks BA adalah matriks *defective*. Matriks sederhana tidak mungkin *similar* dengan matriks *defective*.

Jika $m \leq n$, apa yang dapat disimpulkan tentang hubungan antara nilai eigen dan vektor eigen dari matriks AB dan BA?

1.2. Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang maka rumusan masalah yang akan dikemukakan pada tesis ini adalah: Diberikan matriks riil $A_{m\times n}$ dan $B_{n\times m}$, $m \leq n$. Bagaimanakah hubungan antara nilai eigen dan vektor eigen dari AB dan BA?

1.3. Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui hubungan antara nilai eigen dan vektor eigen dari AB dan BA jika $A_{m\times n}$ dan $B_{n\times m}$, $m \leq n$.

1.4. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memperluas wawasan penulis serta pembaca pada umumnya dan menambah wawasan mengenai konsep hubungan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks AB dan BA jika diketahui matriks $A_{m\times n}$ dan $B_{n\times m}$, $m \leq n$.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas beberapa definisi dan teorema dasar yang mendukung pembahasan mengenai hubungan antara nilai eigen dan vektor eigen dari AB dan BA.

2.1. Matriks

Definisi 2.1.1(Anton,1988)

Sebuah matrik adalah sebuah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan di dalam susunan tersebut dinamakan entri di dalam matriks.

Ukuran sebuah matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris dan banyaknya kolom yang terdapat dalam matriks tersebut. Sebuah matriks di lambangkan dengan huruf besar dan entri-entrinya dinyatakan dengan huruf kecil. Jika Aadalah sebuah matriks, maka kita akan menggunakan A_{ij} untuk menyatakan entri yang terdapat di dalam baris i dan kolom j. Jadi sebuah matriks $m \times n$ secara umum dapat dituliskan sebagai

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sebuah matriks dengan n baris dan n kolom dinamakan matriks kuadrat berorde n dan entri-entri a_{11}, a_{22}, … , a_{nn} dikatakan berada pada diagonal utama dari matriks A (Anton,1988)

Definisi 2.1.2(Jacob,1990)

Sebuah matriks F mxn adalah sebuah fungsi dengan daerah asalnya adalah $\{(i,j) \,/\, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ dan daerah hasilnya adalah lapangan skalar F. Jika A adalah suatu fungsi, kemudian nilai fungsi ini pasangan dari (i,j) yang dinotasikan dengan $A(i,j)$,di mana i,j dinamakan entri pada matriks A.

Teorema 2.2.3(Anton,1988)

Dengan menganggap bahwa ukuran-ukuran matriks adalah sedemikian sehingga operasi-operasi yang ditunjukkan dapat dilakukan, maka kaidah-kaidah ilmu hitung matriks berikut akan berlaku :

$a). A + B = B + A$ (*Hukum komutatif untuk penambahan*)

$b). A + (B + C) = (A + B) + C$ (*Hukum asosiatif untuk penambahan*)

$c). A(BC) = (AB)C$ (*Hukum asosiatif untuk perkalian)*

$d). A(B + C) = AB + AC$ (*Hukum distributif*)

$e). (B + C)A = BA + CA$ (*Hukum distributif*)

$f). A(B - C) = AB - AC$

$g). (B - C)A = BA - CA$

$h). a(B + C) = aB + aC$

$i). a(B - C) = aB - aCj). (a + b)C = aC + bC$

$k). (a - b)C = aC - bC$

$l).(ab)C = a(bC)$

$l).a(BC) = (aB)C$

2.2. Kebebasan Linier

Jika $S = \{v_1, v_2, v_3, \dots\dots\dots, v_r\}$ adalah sebuah himpunan vektor, maka persamaan vektor $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 + \dots\dots\dots + k_rv_r = 0$ mempunyai paling sedikit satu pemecahan yakni $k_1 = 0, k_2 = 0,\ k_3 = 0, \dots, k_r = 0$. Jika ini adalah satu-satunya pemecahan, maka S dinamakan sebuah himpunan yang bebas linier (linearly independent). Jika ada pemecahan lain, maka S dinamakan sebuah himpunan yang tak bebas linier (linearly dependent).

Contoh.

Tentukanlah apakah vektor-vektor $v_1 = (1,-2,3), v_2 = (5,6,-1), v_3 = (3,2,1,)$ Membentuk himpunan yang tak bebas linier atau himpunan yang bebas linier.

Penyelesaian. Di dalam komponen-komponennya maka persamaan vector

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0$$

Menjadi

$$k_1(1,-2,3) + k_2(5,6,-1) + k_3(3,2,1) = (0,0,0)$$

Atau secara ekivalen maka

$$k_1 + 5k_2 + 3k_3, -2k_1 + 6k_2 + 2k_3, 3k_1 - k_2 + k_3 = (0,0,0)$$

Dengan menyamakan komponen-komponennya maka akan memberikan

$$k_1 + 5k_2 + 3k_3 = 0$$

$$-2k_1 + 6k_2 + 2k_3 = 0$$

$$3k_1 - k_2 + k_3 = 0$$

Dengan memecahkan sistim persaman ini sehingga menghasilkan

$k_1 = -\frac{1}{2}t$ $\quad k_2 = -\frac{1}{2}t$ $\quad k_3 = t$

Karena sistem di atas mempunyai pemecahan yang tak trivial maka v_1, v_2, v_3 membentuk himpunan yang tak bebas linier.

Definisi 2.2.1(Jacob,1990)

Suatu himpunan vektor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dikatakan bebas linier jika $r_1, r_2, \ldots, r_n$ adalah skalar dan $r_1v_1 + r_2v_2 + \ldots + r_nv_n = \vec{0}$, maka haruslah

$r_1 = 0, r_2 = 0, \ldots, r_n = 0$

Jika $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tidak bebas linier, kita katakan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linearly dependent.

Lemma 2.2.3(Jacob,1990)

Di berikan $v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_n$ adalah vektor bebas linier dan ruang vektor V, misalkan $w \epsilon V$ maka $v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_n, w$ adalah bebas linier jika dan hanya jika w tidak kombinasi linier dari $v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_n$.

Bukti: Misalkan w adalah kombinasi linier dari $v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_n$, berarti $w = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$. Maka $v_1 + v_2 + \ldots + v_n + w = \vec{0}$, yang menunjukkan $v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_m$ tidak bebas linier. Bertentangan dengan asumsi bahwa w tidak kombinasi linier dari $v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_n$. Misalkan $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n + bw = \vec{0}$ dimana $a_1,\ a_2,\ \ldots\ , a_n$, b adalah skalar. Jika $b \neq 0$, maka $a_1v_1 + a_2v_2 +$

$... + a_n v_n + bw = \vec{0}$ dapat dibagi dengan b, sehingga $w = \frac{a_1}{b} v_1 + \frac{a_2}{b} v_2 + ... + \frac{a_n}{b} v_n$, ini bertentangan dengan asumsi bahwa w bukan kombinasi linier dari $v_1, v_2, ..., v_n$. Tetapi jika $b = 0$ maka $a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n = \vec{0}$ merupakan bebas linier dari $v_1, v_2, ..., v_n$ di mana $a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ \dots,\ a_n = 0$. Secara umum menunjukkan bahwa $v_1, v_2, ..., v_n, w$ adalah bebas linier.■

2.3. Basis dan Dimensi

Definisi 2.3.1(Anton,1988)

Jika V adalah sebarang ruang vektor dan $S = \{v_1, v_2, ..., v_r\}$ adalah sebuah himpunan berhingga dari vektor-vektor di dalam V, maka S dinamakan sebuah basis untuk V jika:

1) S bebas linier
2) S merentang

Definisi 2.3.4(Anton,1988)

Dimensi dari sebuah ruang vektor V yang berdimensi berhingga didefinisikan sebagai banyak vektor didalam sebuah basis untuk V. Ruang vektor nol mempunyai dimensi nol

Teorema 2.3.5(Anton,1988)

Vektor-vektor baris yang tak nol di dalam sebuah bentuk eselon baris dari sebuah matrik A membentuk sebuah basis untuk ruang baris dari A.

Contoh.

Carilah sebuah basis untuk ruang kolom dari

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Pemecahan. Transpos matriks A adalah

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Dengan mereduksinya ke bentuk eselon baris maka menghasilkan

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jadi vektor (1,3,0) dan vektor (0,1,2) membentuk sebuah basis untuk ruang baris dari A^t atau secara ekivalen

$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ atau $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Membentuk suatu basis untuk ruang kolom dari A.

2.4. Rank

Definisi 2.4.1(Anton,1988)

Dimensi ruang baris dan ruang kolom dari sebuah matrik A di namakan rank dari matriks A.

Definisi 2.4.2(Jacob,1990)

Misalkan A dan B adalah suatu matriks dan B ekivalen baris dengan A. jika B matriks eselon baris, maka B dikatan reduksi eselon baris dari A. jika B matriks reduksi eselon baris, maka B dikatakan reduksi eselon baris dari A. Rank dari matriks A atau dinotasikan rk (A) didefinisikan dengan bilangan dari baris yang tak nol pada reduksi eselon baris dari A.

Contoh.

Diberika matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

Dengan menggunakan operasi baris elementer diperoleh

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\backsim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rank dari A atau rk(A) = 2

2.5 Nilai Eigen Dan Vektor Eigen

Definisi 2.5.1(Anton,1988)

Jika A adalah sebuah matriks n × n, maka sebuah vektor yang tak nol x di dalam R^n dinamakan sebuah vektor eigen (eigen vector) dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x; yakni

$$Ax = \lambda x,$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen (eigen value) dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ dan $det(\lambda I - A)x = 0$ dikatakan persamaan karakteristik dari A

Teorema 2.5.1(Jacob,1990)

Jika A adalah sebuah matrik $n \times n$, maka pernyataan-pernyataan yang berikut ekivalen satu sama yang lain.

a. λ adalah nilai eigen dari A.

b. Sistem persamaan $(\lambda I - A)x = 0$ mempunyai penyelesaian yang tak trivial.

c. Ada sebuah vektor tak nol x di dalam R^n sehingga $Ax = \lambda x$

d. λ adalah pemecahan riel dari persamaan karekteristik $det(\lambda I - A)x = 0$

Vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan sebuah nilai eigen λ adalah vektor tak nol yang memenuhi $Ax = \lambda x$. Secara ekivalen maka vektor eigen yang bersesuaian dengan λ adalah vektor tak nol di dalam ruang pemecahan dari $(\lambda I - A)x = 0$. Ruang pemecahan ini dinamakan sebagai ruang eigen (eigen space) dari A yang bersesuaian dengan λ.

2.6 Similarities (keserupaan)

Definisi 2.6.1 (Anton,1988)

Misalkan A dan B adalah matriks kuadrat, matriks B dikatakan similar dengan A jika ada sebuah matriks P yang dapat dibalik sehingga $B = P^{-1}AP$.

2.7 Matriks Simple Dan Matriks Defective

Jika matriks A dengan $n \times n$ mempunyai n vektor eigen bebas linier maka matriks A dikatakan simple. Karena matriks simple mempunyai n vektor eigen yang bebas linier maka sering menggambarkan bentuk yang sempurna. Sedangkan Matriks tidak simple adalah defective.

Teorema 2.7.1 (Goldberg,1991)

Jika matriks A mempunyai n vektor eigen dari n nilai eigen yang berbeda maka A adalah martiks simple.

Bukti :

Dari sebuah teorema yaitu misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah n nilai eigen yang berbeda dari A dan $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ adalah vektor eigen yang sesuai. Maka himpunan $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$adalah bebas linier.hubungan vektor eigen denga nilai eigen yang tak sama adalah bebas linier. Jadi dari hipotesis secara tidak lansung bahwa A mempunyai n vektor eigen yang bebas linier, dari setiap satu nilai eigen.■

Teorema 2.7.2 (Goldberg,1991)

Misalkan A mempunyai nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$,dan sesuai dengan vektor eigen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ yang bebas linier maka A adalah matriks simple jika dan hanya jika A dapat didiagonilisir

Bukti :

Karena { $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ } adalah vektor eigen dari A. berdasarkan sebuah lemma dimana suatu kolom yang tak nol dari S adalah vektor eigen dari A jika dan hanya jika $AS = S\Lambda$. Jika A adalah matriks sederhana, dengan n vektor eigen yang bebas linier dari A, yang mana menjadi kolom dari S. Maka S dapat dibalik dan $AS = \Lambda S$ Sehingga $S^{-1}AS = \Lambda$; ini adalah A yang dapat didiagonalisir. Sebaliknya, jika A yang dapat didiagonalisir, diperoleh $S^{-1}AS = \Lambda$ dan oleh karena itu S dapat dibalik dan $AS = S\Lambda$. Kolom S adalah vektor eigen dari A dan karena S dapat dibalik , kolom S adalah bebas linier. Jadi A adalah matriks sederhana.■

2.8. Multiplisitas Geometri

Misalkan $\lambda = \lambda_0$ adalah nilai eigen dari A, multiplisitas geometri dari λ_0 didefinisikan dimensi ruang eigen yang bersesaian dengan λ_0 dan simbolkan dengan $g(\lambda_0)$, di mana $g(\lambda) = \dim(\text{null}(\lambda I - A))$ (Goldberg,1991).

2.9. Ruang Null

Misalkan diketahui matriks A adalah $m \times n$ dan $\text{rank}(A) = r$, ruang vektor dari himpunan pemecahan $A\text{x} = 0$ dikatakan ruang null dari A dan ditulis dengan $null(A)$, dimensi ruang null dari A adalah banyakya kolom dikurangi dengan $\text{rank}(A)$ atau ditulis dengan

$$\dim(null(A)) = n - r$$

Misalkan transpose dari A adalah A^T.maka dengan menggunakan operasi eselon baris dari $(A^T \quad I)$ akan menghasikan $(R \quad N) = \begin{pmatrix} R_1 & N_1 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix}$, di mana R_1 adalah

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1. Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan mulai bulan Desember 2007 sampai dengan bulan Juni 2008. Tempat penelitian adalah di perpustakaan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas Padang.

3.2. Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan metode studi literatur yang membahas hubungan antara nilai eigen dan vektor eigen dari AB dan BA jika $A_{m\times n}$ dan $B_{n\times m}$, $m \leq n$. Pada penelitian ini peneliti berusaha mengumpulkan literatur (buku dan jurnal ilmiah) yang relevan sebagai sumber utama penelitian ini. Selanjutnya akan mempelajarinya dengan mengurutkan, mengklasifikasikan, mengelompokkan dan mereduksinya ke dalam suatu analisis. Pada tahap ini diberikan pembahasan dan contoh-contoh mengenai hubungan antara nilai eigen dan vektor eigen dari AB dan BA jika $A_{m\times n}$ dan $B_{n\times m}$, $m \leq n$.

Untuk lebih jelasnya, keseluruhan preses di atas dapat dirinci dalam empat tahap, yaitu:

Tahap Pertama

Pada tahap ini peneliti akan mengumpulkan literatur berupa buku dan jurnal ilmiah yang berkaitan dengan masalah penelitian. Kemudian dianalisis dan ditarik kemudian dikumpulkan konsep-konsep sebagai landasan pemikiran untuk mencari solusi masalah penelitian.

Tahap Kedua

Pada tahap ini seluruh konsep yang sudah dikumpulkan berdasarkan tahap pertama dipelajari dengan mengurutkan, mengklasifikasikan, mengelompokkan dan mereduksinya ke dalam suatu analisis.

Tahap ketiga

Pada tahap ini dilakukan pembahasan mengenai hubungan antara nilai eigen dan vekor eigen dari AB dan BA.

Tahap Keempat

Pada tahap ini mengambil kesimpulan berdasarkan tahap tiga, yaitu kesimpulan tentang hubungan antara nilai eigen dan vektor eigen dari AB dan BA.

BAB IV

PEMBAHASAN
HUBUNGAN ANTARA NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN DARI MATRIKS AB DAN BA

Pada bab ini akan diuraikan tentang nilai eigen dan vektor eigen dari matriks AB dan BA, dan hubungan yang terdapat antara nilai eigen dan vektor eigen dari perkalian matriks AB dan BA.

Teorema 4.1(Goldberg,1991)

Misal $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ dan $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Jika $(\lambda_0 \neq 0, u)$ adalah pasangan eigen dari AB dengan $g_{AB}(\lambda_0) = r$ adalah multiplisitas geometri dari AB, maka (λ_0, Bu) adalah pasangan eigen dari BA dan $g_{BA}(\lambda) = r$ adalah multiplisitas geometri dari BA.

Bukti :

Dengan hipotesis, $ABu = \lambda_0 u$ kemudian dikalikan dengan B maka

$$B(AB)u = (BA)(Bu) = B(\lambda_0 u) = \lambda_0(Bu)$$

Sehingga (λ_0, Bu) adalah pasangan eigen dari BA asalkan $Bu \neq 0$. Tetapi, jika $Bu = 0$ maka harus diikuti dengan $ABu = A0 = 0$ karena $(0, u)$ merupakan pasangan eigen dari AB, kontradiksi dengan $\lambda_0 \neq 0$. Dengan mempertimbangkan suatu multiplisitas geometri dari λ_0. Misalkan $g_{AB}(\lambda_0) = r$, $g_{BA}(\lambda_0) = s$, dan $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ adalah himpunan vektor eigen yang bebas linier dari hubungan AB untuk nilai eigen λ_0 yang tidak sama dengan nol. Himpunan $\{Bu_1, Bu_2, \dots, Bu_r\}$

berdasarkan pernyataan di atas merupakan himpunan eigen vektor untuk *BA*.

Misalkan

$$a_1 Bu_1 + a_2 Bu_2 + \cdots + a_r Bu_r = 0$$

Maka perkalian persamaan ini dengan *A* menghasilkan

$$A0 = 0 = a_1 ABu_1 + a_2 ABu_2 + \cdots + a_r ABu_r$$

$$= a_1 \lambda_0 u_1 + a_2 \lambda_0 u_2 + \cdots + a_r \lambda_0 u_r$$

$$= \lambda_0 (a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_r u_r$$

Karena $\lambda_0 \neq 0$, sehingga

$$0 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_r u_r$$

Tetapi, karena pengandaian $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ adalah bebas linier maka secara tidak lansung semuanya adalah nol, dan oleh karena itu $\{Bu_1, Bu_2, \ldots, Bu_r\}$ adalah bebas linier. Dengan membalikkan *AB* dan *BA* maka dapat disimpulkan bahwa $r \geq s$. Sehingga $r = s$.■

Dari pemecahan pembuktian jika $\lambda_0 = 0$ adalah nilai eigen dan jika salah satu matriks *A* dan *B* adalah nonsingular, maka *AB* *similar* dengan *BA* dan oleh karena itu $g_{AB}(0) = g_{BA}(0)$. Tentu saja dengan menganggap *A* singular dan *B* non singular, maka rank (*A*) = rank (*BA*) = rank (*AB*) dan oleh sebab itu

$$g_{AB}(0) = n - \text{rank}\,(AB) = n - \text{rank}\,A$$

$$= n - \text{rank}\,(BA) = g_{BA}(0)$$

Contoh.1. Diberikan matriks $\in \mathbb{R}^{m\times n}$ dan $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, di mana

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

a. Tentukan nilai eigen dan vector eigen dari AB dan BA

b. Tunjukkan (λ_0, Bu) adalah pasangan eigen dari BA

c. Tentukan r dan s, di mana $g_{AB}(\lambda_0) = r$ dan $g_{BA}(\lambda_0) = s$. Tunjukkan bahwa $r = s$

Penyelesaian.

a. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

<u>Maka matriks A dikalikan dengan matriks B adalah</u>

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} \lambda - 5 & 6 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 5)\lambda - 6 =$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda - 6$$

persamaan karakteristiknya adalah: $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$

$(\lambda - 6)(\lambda + 1) = 0$

Maka nilai eigen untuk AB adalah $\lambda_1 = 6$ dan $\lambda_2 = -1$

Untuk $\lambda_1 = 6$

$(\lambda \mathrm{I} - AB)x = \vec{0}$

$\begin{pmatrix} \lambda - 5 & 6 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} x = \vec{0}$

$\begin{pmatrix} 6-5 & 6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} x = \vec{0}$

$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_1 + 6x_2 = 0$

$x_1 + 6x_2 = 0$

Misalkan $x_2 = t$ maka $x_1 = -6t$

Sehingga $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vektor eigen dari AB dengan $\lambda = 6$ adalah $u = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>Perkalian matriks B dengan A adalah</u>

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - BA) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -6 & 0 \\ -3 & \lambda + 1 & 2 \\ 5 & -5 & \lambda - 4 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda - 4) - 60 + 10\lambda - 20 - 18\lambda + 72$$

$$= \lambda^3 - 5\lambda^2 - 6\lambda$$

Persamaan karakteristiknya adalah: $\lambda^3 - 5\lambda^2 - 6\lambda = 0$

$\lambda^3 - 5\lambda^2 - 6\lambda = 0$

$\lambda(\lambda - 6)(\lambda + 1) = 0$

Maka nilai eigen untuk AB adalah $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 6$ dan $\lambda_3 = -1$

Untuk $\lambda_1 = 6$

$(\lambda I - BA)x = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} \lambda-2 & -6 & 0 \\ -3 & \lambda+1 & 2 \\ 5 & -5 & \lambda-4 \end{pmatrix} x = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 6-2 & -6 & 0 \\ -3 & 6+1 & 2 \\ 5 & -5 & 6-4 \end{pmatrix} x = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ -3 & 7 & 2 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$4x_1 - 6x_2 = 0$

$-3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 0$

$5x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0$

Misalkan $x_2 = t$ maka $x_1 = \frac{6}{4}t$ dan $x_3 = -\frac{5}{4}t$

Sehingga $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{4}t \\ t \\ -\frac{10}{4}t \end{pmatrix} = \frac{1}{4}t \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

Vektor eigen dari BA dengan $\lambda = 6$ adalah $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$……………..(1)

b. $Bu = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$……………(2)

Dari (1) dan (2) maka dapat dibuktikan bahwa (λ_0, Bu) adalah pasangan eigen dari *BA*.

c. Menentukan r dan s, di mana $g_{AB}(\lambda_0) = r$ dan $g_{BA}(\lambda_0) = s$. Kemudian akan dilihatkan bahwa $r = s$

- jika $g_{AB}(\lambda_0) = r$

  $g_{AB}(\lambda) = \dim(\mathrm{null}(\lambda I - AB))$

  Untuk $\lambda = 6$ maka

  $\lambda I - AB = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ dan $(\lambda I - AB)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

$[(\lambda\mathrm{I} - AB)^t \,\vdots\, \mathrm{I}]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 \\ 6 & 6 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & 6 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{null}(\lambda\mathrm{I} - AB) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

jadi $\dim\big(\mathrm{null}(\lambda\mathrm{I} - AB)\big)$ adalah 1 atau $g_{AB}(\lambda_0) = 1$,

maka $r = 1$...........(1)

- $g_{BA}(\lambda_0) = s$

  $g_{BA}(\lambda) = \dim\big(\mathrm{null}(\lambda\mathrm{I} - BA)\big)$

  Untuk $\lambda = 6$ maka

$$\lambda\mathrm{I} - BA = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ -3 & 7 & 2 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix} \text{ dan } (\lambda\mathrm{I} - BA)^t = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -6 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

  $[(\lambda\mathrm{I} - BA)^t \,\vdots\, \mathrm{I}]$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 & & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -5 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 8 & 0 & 16 & & 2 & 0 & 3 \\ -12 & 0 & -24 & \vdots & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & 2 & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\backsim \begin{pmatrix} 8 & 0 & 16 & & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 6 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 8 & 0 & 16 & & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{null}(\lambda\mathrm{I} - BA) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}\right)$$

  jadi $\dim\big(\mathrm{null}(\lambda\mathrm{I} - BA)\big)$ adalah 1 atau $g_{BA}(\lambda_0) = 1$,

  maka $s = 1$ ....(2)

  Dari (1) dan (2) dapat dilihat bahwa $r = s$

Teorema 4.2 (Goldberg,1991)

Misal $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ dan $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Misalkan pula $c_{AB}(\lambda)$ adalah polinomial karakteristik dari AB dan $c_{BA}(\lambda)$ adalah polynomial karakteristik dari BA maka

$$\lambda^{n-m} c_{AB}(\lambda) = c_{BA}(\lambda)$$

Bukti :

Karena $c_{AB}(\lambda)$ adalah polynomial dengan pangkat m dan $c_{BA}(\lambda)$ adalah polynomial dengan pangkat n, dan AB tidak sama dengan BA. Bagaimanpun, dengan mengingat bagian perkalian berikut

$$\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$$

Ini menunjukkan bahwa

$$C = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & AB \end{pmatrix}$$

serupa, sehingga persamaan karakteristiknya sama. Tetapi $c_C(\lambda) = \lambda^n c_{AB}(\lambda)$ dan $c_D(\lambda) = \lambda^m c_{BA}(\lambda)$ yang menunjukkan bahwa

$$\lambda^{n-m} c_{AB}(\lambda) = c_{BA}(\lambda) \qquad \blacksquare$$

Contoh.2. Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ dan $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ sebagai berikut

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tunjukkanlah bahwa $\lambda^{n-m} c_{AB}(\lambda) = c_{BA}(\lambda)$!

Penyelesaian.

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Maka hasil AB adalah

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristiknya adalah $\det(\lambda I - AB) = 0$ yaitu

$$\det\left(\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)\lambda - 3$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

Jadi $c_{AB}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ ………………... (1)

Hasil BA adalah

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 21 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 21 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristiknya adalah $\det(\lambda I - BA) = 0$ yaitu

$$\det\left(\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 21 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \lambda & 0 & -3 \\ -6 & \lambda & -21 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^2(\lambda - 2) - 3\lambda$$

$$= \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$$

Jadi $c_{AB}(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 3)$ ……………(2)

Dari (1) dan (2) dapat dilihat bahwa $\lambda^{n-m}c_{AB}(\lambda) = c_{BA}(\lambda)$

Akibat 4.3. Jika $n = m$, maka $\mathrm{c_{AB}}(\lambda) = \mathrm{c_{BA}}(\lambda)$

Contoh.3. Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ dan $B \in \mathbb{R}^{2\times2}$ sebagai berikut

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Tunjukkalah bahwa $c_{AB}(\lambda) = c_{BA}(\lambda)$!

Penyelesaian.

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Maka hasil AB adalah

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 21 & 23 \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristiknya adalah det $(\lambda\mathrm{I} - AB) = 0$ yaitu

$$\begin{aligned} \det\left(\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) - \begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 21 & 23 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} \lambda - 14 & -12 \\ -21 & \lambda - 23 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - 14)\,(\lambda - 23) - 252 \\ &= \lambda^2 - 37\lambda - 322 - 252 \\ &= \lambda^2 - 37\lambda - 70 = 0 \end{aligned}$$

Jadi $c_{AB}(\lambda) = \lambda^2 - 37\lambda - 70$ ……………….. (1)

Hasil BA adalah

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 18 \\ 15 & 17 \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristiknya adalah det $(\lambda\mathrm{I} - BA) = 0$ yaitu

$$\det\left(\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)-\begin{pmatrix}20 & 18\\ 15 & 17\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\lambda-20 & -18\\ -15 & \lambda-17\end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-20)(\lambda-17)-270$$

$$= \lambda^2 - 37\lambda + 340 - 270$$

$$= \lambda^2 - 37\lambda + 70 = 0$$

Jadi $c_{AB}(\lambda) = \lambda^2 - 37\lambda + 70$ ....(2)

Dari (1) dan (2) dapat dilihat bahwa $c_{AB}(\lambda) = c_{BA}(\lambda)$

Teorema 4.4. (Goldberg,1991)

Misalkan $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ dan $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ dan AB adalah matriks sederhana. Maka BA adalah matriks sederhana jika dan hanya jika rank (AB) = rank (BA).

Bukti:

Diketahui $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ yang berbeda dan nilai eigen tak nol dari BA. Dengan teorema, $n = \text{rank}\,(BA) + \dim(null(BA))$. Himpunan $g_{BA}(0) = 0$ jika $\lambda = 0$ adalah bukan nilai eigen dari BA, maka $\dim(null(BA)) = g_{BA}(0)$ apakah 0 adalah nilai eigen dari BA atau tidak.

Karena itu, dengan ketentuan ini :

$$n = \text{rank}\,(BA) + g_{BA}(0)$$

Sama dengan

$$m = \text{rank}\,(AB) + g_{AB}(0)$$

Berdasarkan persamaan di atas jika m dan n di kurangkan maka hasilnya adalah

$$n - m = \text{rank}\,(BA)\text{-rank}\,(AB) + g_{BA}(0) - g_{AB}(0)$$

Didefinisikan dengan s, di mana

$$s = g_{BA}(0) + g_{BA}(\lambda_1) + g_{BA}(\lambda_2) + \cdots + g_{BA}(\lambda_k)$$

Karena dari teorema 4.1, $g_{AB}(\lambda_i) = g_{BA}(\lambda_i)$ untuk $i = 1,2, \dots, k$. Sehingga s dapat ditulis

$$s = g_{BA}(0) + [g_{AB}(0) + g_{AB}(\lambda_1) + g_{AB}(\lambda_2) + \cdots + g_{AB}(\lambda_k)] - g_{AB}(0)$$

Karena *AB* adalah matriks *simple*, maka

$$m = g_{AB}(0) + g_{AB}(\lambda_1) + g_{AB}(\lambda_2) + \cdots + g_{AB}(\lambda_k)$$

sehingga

$$n - m = \text{rank}\,(BA)\text{-rank}\,(AB) + s - m$$

Jadi $n = s$ jika dan hanya jika *BA* adalah matriks *simple* atau $n = s$ jika dan hanya jika rank $(BA) =$ rank $(AB) = 0.$■

Contoh.4. Dari soal contoh 1.

a. Tunjukkanlah bahwa *AB* dan *BA* adalah sederhana.

b. Tentukanlah rank (BA) dan rank (AB)

c. Kesimpulan apa yang dapat diambil dari a dan b?

Penyelesaian.

a. * Diketahui nilai eigen dari *AB* adalah $\lambda_1 = 6$ dan $\lambda_2 = -1$

untuk $\lambda_1 = 6$ maka vektor eigennya adalah $\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

untuk $\lambda_2 = -1$ maka

$(\lambda \mathrm{I} - AB)x = \vec{0}$

$\begin{pmatrix} \lambda - 5 & 6 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} x = \vec{0}$

$\begin{pmatrix} -1 - 5 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x = \vec{0}$

$\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-6x_1 + 6x_2 = 0$

$x_1 - x_2 = 0$

Misalkan $x_2 = t$ maka $x_1 = t$

Sehingga $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Jadi vektor eigen dari AB dengan $\lambda = -1$ adalah $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Diketahui nilai eigen dari AB adalah $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 6$ dan $\lambda_3 = -1$

Untuk $\lambda_2 = 6$ vektor eigen nya adalah $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

Untuk $\lambda_1 = 0$ maka

$(\lambda \mathrm{I} - BA)x = \vec{0}$

$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & -6 & 0 \\ -3 & \lambda + 1 & 2 \\ 5 & -5 & \lambda - 4 \end{pmatrix} x = \vec{0}$

$\begin{pmatrix} 0 - 2 & -6 & 0 \\ -3 & 0 + 1 & 2 \\ 5 & -5 & 0 - 4 \end{pmatrix} x = \vec{0}$

$\begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 5 & -5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-2x_1 - 6x_2 = 0$

$-3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

$5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0$

Misalkan $x_2 = t$ maka $x_1 = -3t$ dan $x_3 = -4t$

Sehingga $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ t \\ 4t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

* Jadi vektor eigen dari BA dengan $\lambda = 0$ adalah $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Untuk $\lambda_3 = -1$ maka

$(\lambda \mathrm{I} - BA)x = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & -6 & 0 \\ -3 & \lambda + 1 & 2 \\ 5 & -5 & \lambda - 4 \end{pmatrix} x = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -1 - 2 & -6 & 0 \\ -3 & -1 + 1 & 2 \\ 5 & -5 & -1 - 4 \end{pmatrix} x = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-3x_1 - 6x_2 = 0$

$-3x_1 + 2x_3 = 0$

$5x_1 - 5x_2 - 5x_3 = 0$

Misalkan $x_2 = t$ maka $x_1 = -2t$ dan $x_3 = -3t$

Sehingga $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ -3t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Jadi vektor eigen dari BA dengan $\lambda = -1$ adalah $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Karena *AB* dan *BA* mempunyai n vektor dari n nilai eigen yang berbeda maka *AB* dan *BA* adalah matrik simple.

b. Menentukan $\text{rank}(AB)$ dan $\text{rank}(BA)$

- Diketahui $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ maka $\text{rank}(AB) = 2$

- Diketahui $BA = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ dengan mereduksinya ke eselon baris maka menghasilkan $\begin{pmatrix} -5 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, maka $\text{rank}(BA) = 2$

Jadi $\text{rank}(AB)$ dan $\text{rank}(BA) = 2$

c. Dari a dan b dapat diambil kesimpulan bahwa misalkan AB adalah matriks simple, maka BA adalah matriks *simple* jika $\text{rank}(AB) = \text{rank}(BA)$. Dan sebaliknya.

BAB V

KESIMPULAN

Misalkan A adalah matriks $m \times n$ dan B adalah matriks $n \times m$ dengan $m \leq n$, maka berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab IV diperoleh kesimpulan dari hubungan antara nilai eigen dan vektor eigen dari matriks AB dan BA, yaitu :

a. Jika u adalah vektor eigen dari AB dengan nilai eigennya adalah $\lambda = \lambda_0$ dimana $\lambda_0 \neq 0$ maka Bu adalah vektor eigen dari BA dengan nilai eigen yang sama yaitu $\lambda = \lambda_0$.

b. Jika diketahui polinomial karakteristik dari AB adalah $c_{AB}(\lambda)$ maka polinomial karakteristik dari BA adalah $c_{BA}(\lambda) = \lambda^{n-m} c_{AB}(\lambda)$. Sedangkan jika $m = n$ maka $c_{BA}(\lambda) = c_{AB}(\lambda)$.

c. Jika diketahui AB adalah matriks simple maka BA matriks simple jika dan hanya jika $\text{rank}(AB) = \text{rank}(BA)$.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H.1988. Aljabar linier. Erlangga. Bandung.

Baker, R. 2003. Linear Algebra. Rinton Press. Inc.New York

Goldberg. J.L. 1991. Matriks Theory with Applications. McGraw-Hill. Inc.New York

Jacob, B. 1990. Linear Algebra. W.H Freeman and Company. New York

Meyer. C.D. 2000. Matrix Analysis and Applied Linear Aljebra. Siam. Philadelphia